E.N.S.A.E. 1982

Option Mathématiques

TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(2 h)

On considère l'équation différentielle :

(E) $xy'' + (1 - x^2)\,y' - y = 0$, y fonction de x, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$,

dont on cherche les solutions développables en série entière et prenant en 0 la valeur 1 :

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad ; a_0 = 1 .$$

1° Déterminer la relation de récurrence à laquelle doit nécessairement satisfaire la suite (a_n) pour que $\sum_{n=0} a_n x^n$ soit solution de (E); on exprimera le terme général a_n en fonction de n, a_{n-1} et a_{n-2}. Désormais (a_n) est la suite ainsi définie, avec $a_0 = 1$.

Calculer a_n de $n = 1$ à $n = 8$ sous forme de fraction irréductible; on laissera apparaître sur la copie une partie des calculs intermédiaires mais l'expression définitive ne doit comporter ni somme ni produit non effectués.

2° Donner, sans autre explication, dans un unique tableau, obligatoirement disposé en troisième page de la copie, pour n variant de 1 à 8 :

la fraction irréductible représentant a_n et les meilleures valeurs décimales approchées à 10^{-6} près de a_n, $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ et $3^n.a_n$ (l'incertitude est donc inférieure ou égale à $\frac{1}{2}\,10^{-6}$).

3° λ et q étant deux réels strictement positifs donnés, on considère la propriété $P(n)$: $a_n < \lambda q^n$.

Montrer que, tout au moins à partir d'un certain rang N, si $P(n-2)$ et $P(n-1)$ sont vraies, alors $P(n)$ est vraie; on ne demande pas d'expliciter N en fonction de q.

En déduire :

$\forall q \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $n \geqslant N \Rightarrow a_n < \lambda q^n$

Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Sa somme est désormais notée $f(x)$.

4° On choisit $q = \frac{1}{3}$; montrer que N = 7 convient (ainsi que les nombres supérieurs à 7).

Utiliser le tableau défini à la deuxième question pour déterminer λ, aussi petit que possible, tel que : $n \geqslant 9$ entraîne $a_n < \lambda \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

5° Calculer $S_8 = \sum_{n=0}^{8} a_n$. Déterminer un majorant de $R_8 = \sum_{n=9}^{+\infty} a_n$. En déduire un encadrement de $f(1)$ par deux nombres décimaux arrondis à cinq chiffres significatifs.

6° Pour quelles valeurs de l'entier positif n a-t-on $\frac{2}{n+2} < \frac{n-1}{2n}$?

On s'intéresse, pour les valeurs de n ainsi déterminées, à la propriété :

$$Q(n) : \frac{2}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{n-1}{2n} .$$

Montrer que si $Q(n-1)$ est vraie alors $Q(n)$ est vraie (on pourra commencer par exprimer $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ en fonction de n et de $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$).

Utiliser les valeurs approchées déjà calculées pour déterminer le plus petit entier M tel que :

$$n \geqslant M \quad \text{entraîne} \quad \frac{2}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{n-1}{2n} .$$

7° Déterminer un encadrement de $f(-2)$ et de $f'(-2)$. Les valeurs décimales approchées à 10^{-6} près des termes utilisés dans les deux séries seront réunies dans un même tableau.

FIN

1 8 6 1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail